

Lukasiewicz n 值命题逻辑系统中公式的一般真度和形式推演结论的不可靠度估计

张家录, 吴 霞

(湘南学院数学系, 湖南郴州 423000)

摘 要: 在 Lukasiewicz n 值命题逻辑系统中引入命题公式的一般真度概念并讨论其性质, 说明一般真度满足 Kolmogorov 公理. 在形式推演中, 引进公式的不可靠度和前提的必要度概念, 证明在 Lukasiewicz n 值逻辑系统中, 一个有效推理的结论的不可靠度不超过各前提的不可靠度与其必要度的乘积之和. 通过不可靠度在全体公式集上建立逻辑伪距离空间, 证明逻辑伪距离空间中无孤立点, 利用逻辑伪距离在全体公式集 $F(S)$ 中提出两种不同形式的近似推理模式.

关键词: Lukasiewicz n 值逻辑系统; 真度; 不可靠度; 真值状态; 伪距离; 近似推理

中图分类号: O142 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2012) 10-2085-06

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn> **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2012.10.030

The Generally Truth Degrees of Formulas in n -Valued Lukasiewicz Propositional Logic and the Estimation of Uncertainty Degree of Conclusion in Formal Inference

ZHANG Jia-lu, WU Xia

(Department of Mathematics, Xiangnan University, Chenzhou, Hunan 423000, China)

Abstract: This paper introduces the concept of truth degrees of propositions in n -valued Lukasiewicz logical system by means of the infinite product of probability on the value domain. By discussing the properties of truth degree we illustrate that the truth degree satisfies Kolmogorov axioms. By introducing the concepts of uncertainty degree of formulas and essentialness degree of premises we prove that the uncertainty degree of conclusion is less than or equal to the sum of the product of uncertainty degree of every premise and its essentialness degree in formal inference. By using uncertainty degree we establish logic pseudo-metric space on formulas set, and proved that the logic pseudo-metric space has not isolated point. Moreover, we propose two different approximate reasoning models in the formulas set.

Key words: Lukasiewicz n -value logic; truth degree; uncertainty degree; truth value state; pseudo-metric; approximation reasoning

1 引言

数理逻辑是形式化的符号逻辑, 在数理逻辑的推理证明中我们只关心其有效性, 而不太关心其合法性, 对推理的前提是否可靠并未考虑, 这也就是说, 任何前提推出的结论, 只要推理过程的每一步骤都遵循正确的推理规则, 所得到的结论都认为是有效的, 这种单纯的形式推理似乎有一些不足之处. 因为从实际应用的角度看, 我们也应该关注其合法性, 也就是如果能够确认前提是真的, 从前提出结论的过程又遵循推理规则, 则会公认此结论是真的^[1,2,6,7]. 概率逻辑学和计量逻辑学

正是在上述背景下提出来的^[3~11,14]. 在概率逻辑学中, 对推理的前提集中的各公式(即命题)而言, 要考虑其“不确定性”(uncertainty), 不确定性是通过一个数值表征的, 这个数值是由 1 减去该命题为真的概率而得的. 文献[3]通过 Kolmogorov 公理将概率方法与逻辑推理相结合, 通过诸前提的不可靠度估计出其结论的不可靠度的变化范围, 这就是文献[3]中概率逻辑学基本定理: 一个有效推理的结论的不可靠度不超过各前提的不可靠度与其必要度的乘积之和. 但以上文献中都是就经典二值逻辑来讨论的, 那么在多值或连续值($[0, 1]$)逻辑系统中, 结论的不可靠度和各前提的不可靠度之间的关系

如何?或者说概率逻辑学基本定理是否可以推广到多值或连续值($[0,1]$)逻辑系统,这当然是一个值得研究的问题.

本文引入 n 值命题逻辑的赋值域上具有一般概率分布时命题公式的真度和不可靠度概念.将概率逻辑学基本定理推广到 Lukasiewicz n 值逻辑系统中,证明在 Lukasiewicz n 值逻辑系统中,一个有效推理的结论的不可靠度不超过各前提的不可靠度与其必要度的乘积之和.最后给出了真度概念在人工智能中的一些应用,利用不可靠度在全体公式集上建立了伪距离,这种伪距离包容了参考文献[7~13]所引进的伪距离,但建立的过程和其性质的证明比原来的证明要简单得多,在伪距离空间提出全体公式集 $F(S)$ 上的两种不同形式的近似推理模式.

2 Lukasiewicz n 值逻辑系统公式的真度

设 $S = \{q_1, q_2, \dots\}$, $F(S)$ 是由 S 生成的 $(\neg, \vee, \rightarrow)$ 型自由代数,这里 $\neg$ 是 $F(S)$ 上的一元运算, $\vee, \rightarrow$ 均是 $F(S)$ 上的二元运算,并称 S 中的元素为原子命题(或原子公式), $F(S)$ 中的元素为命题公式(简称为公式).

设 $I_n = \{0, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, \dots, \frac{n-2}{n-1}, 1\}$, 如果规定: $\forall x, y \in I_n, \neg x = 1 - x, x \vee y = \max\{x, y\}, x \rightarrow y = R_{lu}(x, y) = (1 - x + y) \wedge 1$, 则 I_n 也成为 $(\neg, \vee, \rightarrow)$ 型代数,我们称之为 Lukasiewicz n 值逻辑系统 L_n . 设 $v: F(S) \rightarrow I_n$ 是 $(\neg, \vee, \rightarrow)$ 型同态,则称 v 为 $F(S)$ 的赋值, $\forall A \in F(S), v(A)$ 叫做公式 A 的值. $F(S)$ 的赋值的全体记为 $\Omega_n^{[1,6]}$.

n 值逻辑系统 L_n 公式集 Γ 的语法结论和语义结论等概念见参考文献[1,6].

对 $v \in \Omega_n$, 记 $v(q_k) = v_k (k = 1, 2, \dots)$, 则无穷维向量 $\vec{v} = \{v_1, v_2, \dots\} \in I_n^\infty$. 反之, 对任一无穷维向量 $\vec{v} = \{v_1, v_2, \dots\} \in I_n^\infty$, 则由 $\vec{v}$ 唯一确定 Ω_n 中的一个赋值 v , 这里 $v(q_k) = v_k (k = 1, 2, \dots)$. 若令 $\varphi(v) = \vec{v}$, 则 $\varphi: \Omega_n \rightarrow I_n^\infty$ 是从 Ω_n 到 I_n^∞ 的一一满射, 称 φ 为 Ω_n 的测度化映射.

设 $v \in \Omega_n, A, B \in F(S)$, 则 (1) $0 \leq v(A) \leq 1$ 是显然的; (2) 由完备性知, 若 A 是逻辑有效公式, 则 $v(A) = 1^{[1,6]}$; (3) 若 A 逻辑蕴含 B , 即 $A \rightarrow B$ 是重言式, 从而 $v(A) \leq v(B)$; (4) 若 A 与 B 的合取式 $A \wedge B$ 为矛盾式(这时也称公式 A 与 B 是逻辑不相容的), 则 $v(A \vee B) = v(A) \vee v(B) = v(A) \wedge v(B) = v(A) + v(B) - v(A \wedge B) = v(A) + v(B)$.

这就说明任何一个赋值 v 满足 Kolmogorov 公理^[3,14]. 因此一个赋值 v 也可看作是全体公式集 $F(S)$ 上的概率.

定义 1 设 $A \in F(S), \text{Auto}(A) = \{q_1, \dots, q_t\}$ 表示 A 中出现的原子公式之集, $v \in \Omega_n$ 是 A 的一个赋值, 则称 $T(v) = (v(q_1), \dots, v(q_t)) \in I_n^t$ 为公式 A 的一个真值状态.

对 $F(S)$ 的一有限子集 Γ , 考虑赋值 v 在 Γ 上的限制 $v|_\Gamma$. 由于 v 由其在 S 上的限制 $v|_S$ 完全确定, 如果 Γ 中各公式中出现的全部原子公式之集为 $\text{Auto}(\Gamma) = \{q_1, \dots, q_t\}$, 则 $v|_\Gamma$ 自然由 $v|_{\text{Auto}(\Gamma)}$ 所确定, 这种 v 的全体之集记为 $\Omega_n(\Gamma)$, 也就是说, 对 $q_i \in \text{Auto}(\Gamma) (i = 1, \dots, t)$, 可以任意指定 $v(q_i)$ 为 I_n 中的任一值, 这时我们称 $T(v) = \{v(q_1), \dots, v(q_t)\}$ 为 $\text{Auto}(\Gamma)$ 的一个真值状态, 易知 $\text{Auto}(\Gamma)$ 的全部真值状态共有 n^t 个. 另一方面, 我们也注意到, 如果“ $\{A_1, A_2, \dots, A_m\} \therefore B$ ”是一个有效推理, 则 $\{A_1, A_2, \dots, A_m, B\}$ 与 $\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ 应有相同的原子公式集^[1,6].

定义 2 设 A 的全部真值状态之集为 $T = \{T(v_1), \dots, T(v_l)\}$, 此处简记 n^t 为 l , P 是 T 上的正规概率分布, 即

$$0 < P(T(v_i)) < 1 (i = 1, \dots, l), \sum_{i=1}^l P(T(v_i)) = 1.$$

则称

$$\tau(A) = \sum_{i=1}^l P(T(v_i)) v_i(A),$$

为公式 A 的一般真度, 在不致引起混淆时, 简称为 A 的真度. 而称

$$U(A) = 1 - \tau(A) = \sum_{i=1}^l P(T(v_i)) (1 - v_i(A)),$$

为公式 A 的不可靠度.

显然, $0 \leq \tau(A) \leq 1$, 又, 逻辑等价的公式有相等的真度.

注 1 (1) 设 $\mu_m (m = 1, 2, \dots)$ 是 I_n 上的概率测度, $T(v) = (v(q_1), \dots, v(q_t))$, 如记 $P(T(v)) = \mu_1(v(q_1)) \times \dots \times \mu_t(v(q_t))$, 则 P 是 I_n^∞ 上的无穷乘积概率测度^[15], 我们特记这种情形下的真度为 τ_0 . 当 μ_m 是 I_n 上的均匀概率分布时, 这时定义 2 中的真度即为文献[9]中的真度.

(2) 如果 $\mu_m (m = 1, 2, \dots)$ 是 I_n 上如下的概率分布: $P(\{0\}) = \frac{n-1}{n}, P(\{\frac{1}{n-1}\}) = \dots = P(\{\frac{n-2}{n-1}\}), P(\{1\}) = \frac{1}{n}$, 且记

$$P(T(v)) = \mu_1(v(q_1)) \times \dots \times \mu_t(v(q_t)),$$

则 P 是 T 上的概率分布, 这时定义 2 中的真度即为文献[11]中的真度.

因此本文所引进的一般真度包容了已有文献中的 Lukasiewicz n 值逻辑系统的真度概念. 由 $\tau(A)$ 的定义

易知下面的结论是不证自明的.

命题 1 设 $A \in F(S)$, 则 $\tau(\neg A) = 1 - \tau(A)$.

命题 2 设 $A \in F(S)$, 则 A 是重言式当且仅当 $\tau(A) = 1$, A 是矛盾式当且仅当 $\tau(A) = 0$.

证明 设 A 是重言式, 易证 $\tau(A) = 1$. 反之, 若 $A = A(q_{i_1}, \dots, q_{i_l})$ 不是重言式, 则有 v_{i_0} , 使 $v_{i_0}(A) < 1$. 因此

$$\begin{aligned}\tau(A) &= \sum_{i=1}^l P(T(v_i))v_i(A) \\ &= \sum_{i \neq i_0} P(T(v_i))v_i(A) + P(T(v_{i_0}))v_{i_0}(A) \\ &< \sum_{i \neq i_0} P(T(v_i)) + P(T(v_{i_0})) = 1.\end{aligned}$$

矛盾! 类似可证关于矛盾式的论断.

注 2 设 $\Gamma = \text{Auto}(A) \cup \{q_{t+1}, \dots, q_{t+k}\} = \{q_1, \dots, q_t, q_{t+1}, \dots, q_{t+k}\}$, 对 $v^{(t+k)} \in \Omega_n(\Gamma)$, 则显然有 $v^{(t+k)}(A) = v(A)$, 其真值状态形如 $T(v^{(t+k)}) = (v^{(t+k)}(q_1), \dots, v^{(t+k)}(q_t), v^{(t+k)}(q_{t+1}), \dots, v^{(t+k)}(q_{t+k})) \in I_n^{t+k}$, 即 $T(v^{(t+k)})$ 与 $T(v)$ 的前 t 个分量相同. 令 $\bar{P}$ 是 $T(v^{(t+k)}) = \{T(v_1^{(t+k)}), \dots, T(v_n^{(t+k)})\}$ 上的概率分布, 且若设 $T(v^{(t+k)})$ 中的前 t 个分量与 $T(v)$ 相同的真值状态为 $T(v_{\alpha_1}^{(t+k)}), \dots, T(v_{\alpha_i}^{(t+k)})$, 则 $\bar{P}(T(v_{\alpha_1}^{(t+k)})) + \dots + \bar{P}(T(v_{\alpha_i}^{(t+k)}))$.

因此 A 的真度有如下的形式不变性:

$$\begin{aligned}\text{命题 3} \quad \tau(A) &= \sum_{i=1}^l P(T(v_i))v_i(A) \\ &= \sum_{i=1}^n \bar{P}(T(v_i^{(t+k)}))v_i^{(t+k)}(A).\end{aligned}$$

命题 4 设 $A, B \in F(S)$, 则

$$\tau(A \vee B) = \tau(A) + \tau(B) - \tau(A \wedge B).$$

特别地, 当 A 与 B 逻辑不相容, 即 A 与 B 合取式为矛盾式, 有 $\tau(A \vee B) = \tau(A) + \tau(B)$.

证明 注意到真度的形式不变性和 $v_i(A \vee B) = v_i(A) + v_i(B) - v_i(A \wedge B)$, 易知结论成立.

命题 5 若 A 蕴涵 B , 则 A 的真度小于等于 B 的真度.

注 3 由以上性质知, 真度 τ 满足 Kolmogorov 公理^[3,14], 因此真度 τ 也可看作是公式集上的概率.

定义 3^[3] 设 $\{A_1, A_2, \dots, A_m\} \vdash B$, 记 $\Gamma = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$, 设 $E \subseteq \Gamma$, 如果结论 B 不能从 $\Gamma - E$ 中的前提推出, 则称 E 为必要前提集. 设 A_i 是 Γ 中的任一前提, 以 $\delta(A_i)$ 记 Γ 中包含 A_i 的个数最少的必要前提集 (简称极小前提集) 中前提的个数, 令 $e(A_i) = 1/\delta(A_i)$, 称 $e(A_i)$ 为 A_i 的必要度. 如果不存在包含 A_i 的极小前提集, 则规定 $e(A_i) = 0$.

由真度的定义和上面的讨论, 有下面的命题.

命题 6 设 “ $\{A_1, A_2, \dots, A_m\} \vdash B$ ” 是一个有效推理, $\Gamma = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$, 且 $\text{Auto}(\Gamma)$ 上的真值状态为 $T(v_1), \dots, T(v_l)$. 则

$$\begin{aligned}\tau(A_k) &= \sum_{i=1}^l P(T(v_i))v_i(A_k) \\ U(A_k) &= 1 - \tau(A_k) = \sum_{i=1}^l P(T(v_i))(1 - v_i(A_k)) \\ \tau(B) &= \sum_{i=1}^l P(T(v_i))v_i(B) \\ U(B) &= \sum_{i=1}^l P(T(v_i))(1 - v_i(B))\end{aligned}$$

3 Lukasiewicz n 值逻辑系统形式推演结论的不可靠度估计

本节讨论形式推演结论的不可靠度和各前提的不可靠度之间的关系, 即将基于 Boole 逻辑系统的概率逻辑学基本定理推广到 Lukasiewicz n 值逻辑系统.

定理 1 设 “ $\{A_1, A_2, \dots, A_m\} \vdash B$ ” 是一个有效推理, $\Gamma = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$, 且 $\text{Auto}(\Gamma)$ 的真值状态集为 $T = \{T(v_1), \dots, T(v_l)\}$. P 是 T 上的概率分布, 则结论 B 的不可靠度不超过各前提的不可靠度与其必要度的乘积之和, 即

$$U(B) \leq e(A_1)U(A_1) + \dots + e(A_m)U(A_m)$$

证明 文献[1]已经说明, 经典的二值 (Boole) 命题逻辑系统可看作是 Lukasiewicz 命题逻辑系统的扩张, 且证明: 如果一个逻辑系统既是 Lukasiewicz 逻辑系统又是 Godel 逻辑系统, 则它等价于经典的 Boole 逻辑系统. 于是, Γ 在 Lukasiewicz 逻辑系统的语法结论也是 Γ 在 Boole 逻辑系统的语法结论, 亦即如果在 Boole 逻辑系统中结论 B 不能从 $\Gamma - E$ 中的前提推出, 则在逻辑系统 L_n 中结论 B 也不能从 $\Gamma - E$ 中的前提推出. 因此, 在 Boole 逻辑系统中包含前提 A_i 极小前提集前提的个数 $\overline{\delta(A_i)}$ 不少于在 Boole 逻辑系统中包含前提 A_i 极小前提集前提的个数 $\delta(A_i)$. 所以, 同一前提 A_i 在 Boole 逻辑系统中的必要度 $\overline{e(A_i)}$ 不超过其逻辑系统 L_n 中的必要度 $e(A_i)$.

设 $v_i \in \Omega_n(\Gamma)$ ($i = 1, \dots, l$), $T(v_i)$ 是其真值状态. 由于赋值 v_i 可看作是 Γ 上的概率, 故公式 $A_1, \dots, A_m, B$ 的不可靠度分别为 $1 - v_i(A_1), \dots, 1 - v_i(A_m), 1 - v_i(B)$, 从而由基于 Boole 逻辑的概率逻辑学的基本定理^[3,14], 有

$$\begin{aligned}1 - v_i(B) &\leq \overline{e(A_1)}(1 - v_i(A_1)) + \dots + \overline{e(A_m)}(1 - v_i(A_m)) \\ &\leq e(A_1)(1 - v_i(A_1)) + \dots + e(A_m)(1 - v_i(A_m))\end{aligned}$$

于是

$$(1 - v_i(B))P(T(v_i)) \leq e(A_1)(1 - v_i(A_1))P(T(v_i)) + \dots + e(A_m)(1 - v_i(A_m))P(T(v_i))$$

$$= \sum_{k=1}^m e(A_k)(1 - v_i(A_k))P(T(v_i)).$$

上式对 i 求和可得

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^l (1 - v_i(B))P(T(v_i)) \\ & \leq \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^m e(A_k)(1 - v_i(A_k))P(T(v_i)) \\ & = \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^l e(A_k)(1 - v_i(A_k))P(T(v_i)) \\ & = \sum_{k=1}^m e(A_k) \sum_{i=1}^l (1 - v_i(A_k))P(T(v_i)) \end{aligned}$$

由命题 6 得

$$U(B) \leq \sum_{k=1}^m e(A_k)U(A_k)$$

所以定理 1 的结论成立.

例 1 容易验证“ $\{q \wedge r, q \rightarrow r, r \rightarrow s\} \therefore q \wedge (r \vee s)$ ”是 Lukasiewicz 3 值命题逻辑系统 L_3 一个有效推理, 这里 q, r, s 均为原子命题. 设 $I_3 = \{0, 0.5, 1\}$ 上概率分布为: $P(\{0\}) = P(\{0.5\}) = 0.25, P(\{1\}) = 0.5$. 记 $A_1 = q \wedge r, A_2 = q \rightarrow r, A_3 = r \rightarrow s, B = q \wedge (r \vee s)$. 则 $\Gamma = \{A_1, A_2, A_3\}$ 上的真值状态可列表如下(表 1).

表 1

$T(v_i)$	$q \wedge r$	$q \rightarrow r$	$r \rightarrow s$	$q \wedge (r \vee s)$	P
$\{1, 1, 1\}$	1	1	1	1	1/8
$\{1, 1, 0.5\}$	1	1	0.5	1	1/16
$\{1, 1, 0\}$	1	1	0	1	1/16
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\{0, 0, 1\}$	0	1	1	0	1/32
$\{0, 0, 0.5\}$	0	1	1	0	1/64
$\{0, 0, 0\}$	0	1	1	0	1/64

4 应用

本节给出本文定义的一般真度和 Lukasiewicz n 值系统的概率逻辑基本定理在人工智能领域中的一些应用. 首先我们指出, 当前提集中只含有有限多个前提时, 文献[9~11]中提出的真度理论可以纳入于本文的框架之中. 在文献[9~11]中, 有一个最基本的概念如下:

设 $B = B(q_1, q_2, \dots, q_t)$ 是 L_n 中含有 t 个原子公式的公式, $\bar{B}(x_1, \dots, x_t)$ 是 B 所诱导的函数 $\bar{B}: I_n^t \rightarrow I_n$. 则称

$$\tau(B) = \frac{1}{n^t} |\bar{B}^{-1}(1)|$$

为公式 B 的真度. 注意, $\bar{B}$ 的变元向量共有 n^t 个, $|\bar{B}^{-1}(1)|$ 表示其中使公式 B 为真的变元向量的个数, 可见这里对变元向量是平等看待的, 而 $\tau(B)$ 正是反映了在等概率的情况下 B 为真的概率. 在本文中, 设“ $\{A_1, A_2, \dots, A_m\} \therefore B$ ”是一个有效推理, $\Gamma = \{A_1, \dots, A_m\}$, 且 Γ

的真值状态集为 $T = \{T(v_1), \dots, T(v_l)\}$. P 是 T 上的概率分布, 设 $\text{Auto}(\Gamma) = \{q_1, \dots, q_t\}$ 是 Γ 中的原子公式集, 则 T 中的每个真值状态均可由 $\text{Auto}(\Gamma)$ 上的若干真值状态所生成. $\text{Auto}(\Gamma)$ 共有 n^t 个真值状态, 在等概率分布之下, 每个状态的概率均为 $1/n^t$. 这时 T 中的每个真值状态的概率均可表示为若干个 $1/n^t$ 的和. 因此上述有效推理的结论为真的概率正是由此所表述的真度. 所以下面的定理成立:

定理 2 设“ $\{A_1, A_2, \dots, A_m\} \therefore B$ ”是一个有效推理, $\Gamma = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$, 且 Γ 的真值状态集为 $T = \{T(v_1), \dots, T(v_l)\}$. 如果 Γ 中的原子公式集 $\text{Auto}(\Gamma)$ 上的真值状态集上的概率分布是等概率分布, 则结论 B 的不可靠度与真度之间有如下的关系:

$$U(B) = 1 - \tau(B) = 1 - \frac{1}{n^t} |\bar{B}^{-1}(1)|$$

通过在全体公式集 $F(S)$ 上建立伪距离, 利用伪距离在 $F(S)$ 中展开近似推理是计量逻辑学在人工智能领域的应用方向之一. 我们已经说明定义 2 所定义的命题公式真度 τ 可看作 $F(S)$ 上的概率, 下面我们利用不可靠度 U 在 $F(S)$ 中建立伪距离, 不过因为这时要用到全部公式的真度, 因此在下面的讨论中我们用到的真度都是注 1(1)中所指出的真度 τ_0 及其相应的不可靠度 U_0 .

定理 3 设 $A, B, C \in F(S)$, 记

$$\begin{aligned} \rho(A, B) &= U_0((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)) \\ &= 1 - \tau_0((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)) \end{aligned}$$

则 (1) A, B 逻辑等价当且仅当 $\rho(A, B) = 0$.

(2) $\rho(A, C) \leq \rho(A, B) + \rho(B, C)$.

即 ρ 是 $F(S)$ 上的伪距离, 且逻辑伪距离空间 $(F(S), \rho)$ 没有孤立点.

证明 (1) 若 A, B 逻辑等价, 则 $A \rightarrow B$ 与 $B \rightarrow A$ 均为重言式. 由命题 2 知 $\rho(A, B) = 0$. 反之, 设 $\rho(A, B) = 0, \tau_0((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)) = 1$, 从而由命题 2 知 $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ 是重言式, 于是 $A \rightarrow B$ 和 $B \rightarrow A$ 都是重言式, 因此 A, B 逻辑等价.

(2) 易证 $\{(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A), (B \rightarrow C) \wedge (C \rightarrow B)\} \therefore (A \rightarrow C) \wedge (C \rightarrow A)$ 是一个有效推理, 又容易知道 $e((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)) = 1, e((B \rightarrow C) \wedge (C \rightarrow B)) = 1$. 因此, 根据定理 1 有

$$\begin{aligned} U_0((A \rightarrow C) \wedge (C \rightarrow A)) &\leq \\ U_0((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)) &+ U_0((B \rightarrow C) \wedge (C \rightarrow B)), \end{aligned}$$

即 $\rho(A, C) \leq \rho(A, B) + \rho(B, C)$, 因此 ρ 是 $F(S)$ 上的伪距离. 为了证明伪距离空间 $(F(S), \rho)$ 中没有孤立点, 需要先证明下面的引理.

引理 1 $\lim_{t \rightarrow \infty} \tau_0(q_1 \wedge q_2 \wedge \dots \wedge q_t) = 0$.

证明 注意使公式 $q_1 \wedge q_2 \wedge \cdots \wedge q_t$ 的值不为 0 的真值状态 $T(v)$ 的每一个分量都不为 0, 因此若记 $B(t) = q_1 \wedge q_2 \wedge \cdots \wedge q_t$, 且记 $\mu_m(\{0\}) = p$, 则

$$\begin{aligned}\tau_0(B(t)) &= \sum_{i=1}^t P(T(v_i))v_i(B(t)) \\ &= \sum_{v_i(B(t))=0} P(T(v_i))v_i(B(t)) \\ &\quad + \sum_{v_i(B(t)) \neq 0} P(T(v_i))v_i(B(t)) \\ &= \sum_{v_i(B(t)) \neq 0} P(T(v_i))v_i(B(t)) \\ &\leq \sum_{v_i(B(t)) \neq 0} P(T(v_i)) = (1 - \mu_m(\{0\}))^t = (1 - p)^t\end{aligned}$$

因 $0 < 1 - p < 1$, 故 $\lim_{t \rightarrow \infty} (1 - p)^t = 0$, 所以

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tau_0(q_1 \wedge q_2 \wedge \cdots \wedge q_t) = 0.$$

现在来证明伪距离空间 $(F(S), \rho)$ 没有孤立点.

设 $A = A(q_1, \cdots, q_k) \in F(S)$, ε 是任一给定的正数, 以下只须证明存在公式 $B \in F(S)$, $B \neq A$, 使得 $\rho(A, B) < \varepsilon$. 由引理 2 有公式 $B(t) = q_{k+1} \wedge \cdots \wedge q_{k+t}$, $\tau_0(B(t)) < \varepsilon$. 令 $B = A \wedge \neg B(t)$, 则容易证明 $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$, $A \rightarrow B$, $A \rightarrow \neg B(t)$ 是逻辑等价的公式. 故由 ρ 的定义和命题 2 可得

$$\begin{aligned}U_0(A \rightarrow \neg B(t)) &= 1 - \tau_0(A \rightarrow \neg B(t)) \\ &= 1 - (1 - \tau_0(B(t))) = \tau_0(B(t)) < \varepsilon.\end{aligned}$$

可以看出 $B \neq A$, B 即为所求.

与定理 3 的证明方法类似还可以证明伪距离 ρ 关于逻辑连接词 $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$ 的连续性等其它的性质. 又由于文献[9~11]研究的真度只是本文在等概率分布下的特殊情形, 因此以上的定理 3 已经包容了文献[9~11]的类似结论, 从而我们可以在 $F(S)$ 中建立近似推理理论.

定义 4 设 Γ 是逻辑伪距离空间 $(F(S), \rho)$ 中的理论, 令

$$\text{div}(\Gamma) = \sup\{\rho(A, B) \mid A, B \in D(\Gamma)\},$$

称 $\text{div}(\Gamma)$ 为理论 Γ 的发散度. 当 $\text{div}(\Gamma) = 1$ 时称 Γ 全发散. 这里 $D(\Gamma)$ 表示全体 Γ 结论之集.

定义 5 设 $\Gamma \subset F(S)$, $A \in F(S)$, $\varepsilon > 0$,

(1) 如果 $\inf\{\rho(A, B) \mid B \in D(\Gamma)\} < \varepsilon$, 则称 A 为 Γ 的 I -型误差小于 ε 的结论, 记作 $A \in D_\varepsilon^I(\Gamma)$.

(2) 如果 $\inf\{U_0(B \rightarrow A) \mid B \in D(\Gamma)\} < \varepsilon$, 则称 A 为 Γ 的 II -型误差小于 ε 的结论, 记作 $A \in D_\varepsilon^{II}(\Gamma)$.

定理 5 设 $\Gamma \subset F(S)$, $A \in F(S)$, $\varepsilon > 0$, 则 $A \in D_\varepsilon^I(\Gamma)$ 当且仅当 $A \in D_\varepsilon^{II}(\Gamma)$.

证明 设 $A \in D_\varepsilon^I(\Gamma)$, 则存在 $B_0 \in D(\Gamma)$, 使得 $\rho(A, B_0) < \varepsilon$. 又

$$\rho(A, B_0) = 1 - \tau_0((A \rightarrow B_0) \wedge (B_0 \rightarrow A))$$

$$\geq 1 - \tau_0(B_0 \rightarrow A) = U_0(B_0 \rightarrow A),$$

从而 $\inf\{U_0(B \rightarrow A) \mid B \in D(\Gamma)\} < \varepsilon$, 所以 $A \in D_\varepsilon^{II}(\Gamma)$.

反之, 设 $A \in D_\varepsilon^{II}(\Gamma)$, 则存在 $B_0 \in D(\Gamma)$, 使得 $U_0(B_0 \rightarrow A) < \varepsilon$. 易证 $B_0 \rightarrow A$ 与 $(A \rightarrow B_0 \vee A) \wedge (B_0 \vee A \rightarrow A)$ 逻辑等价, 从而

$$\begin{aligned}\rho(A, B_0 \vee A) &= U_0((A \rightarrow B_0 \vee A) \wedge (B_0 \vee A \rightarrow A)) \\ &= U_0(B_0 \rightarrow A),\end{aligned}$$

于是 $\rho(A, B_0 \vee A) < \varepsilon$. 又从 $B_0 \in D(\Gamma)$ 可推得 $B_0 \vee A \in D(\Gamma)$ 成立, 因此

$$\inf\{\rho(A, B) \mid B \in D(\Gamma)\} < \varepsilon,$$

所以 $A \in D_\varepsilon^I(\Gamma)$.

例 2 设 $I_3 = \{0, 1/2, 1\}$ 上概率分布为: $P(\{1/2\}) = P(\{0\}) = 1/4$, $P(\{1\}) = 1/2$, $\Gamma = \{q \vee r, q \vee s\}$, $B = q$. 显然 $q \vee r \rightarrow (q \vee s \rightarrow q)$ 不是定理, 故 $q \notin D(\Gamma)$. 但因 $(q \vee r) \wedge (q \vee s)$ 与 $q \vee (r \wedge s)$ 可证等价, 又 $(q \vee r) \wedge (q \vee s) \in D(\Gamma)$, 故 $q \vee (r \wedge s) \in D(\Gamma)$, 且

$$\begin{aligned}\rho(q, q \vee (r \wedge s)) &= U((q \rightarrow q \vee (r \wedge s)) \wedge (q \vee (r \wedge s) \rightarrow q)) \\ &= 1 - \tau((q \rightarrow q \vee (r \wedge s)) \wedge (q \vee (r \wedge s) \rightarrow q)) \\ &= 1 - \tau(q \vee (r \wedge s) \rightarrow q) = 1 - \tau(r \wedge s \rightarrow q)\end{aligned}$$

通过计算, 得 $\tau(r \wedge s \rightarrow q) = 55/64$, 故

$$\rho(q, q \vee (r \wedge s)) = 9/64 = 0.1406.$$

因此, q 是 Γ 的 I -型误差小于 0.15 的结论.

5 结束语

本文在 Lukasiewicz n 值命题逻辑的赋值域 I_n 上具有一般概率分布的假设下, 引入 Lukasiewicz n 值命题逻辑系统公式的一般真度概念. 将基于 Boole 逻辑的概率逻辑学中的基本定理推广到 Lukasiewicz n 值逻辑系统中, 给出有效推理结论不可靠度的估计: 在 Lukasiewicz n 值逻辑系统中, 一个有效推理的结论的不可靠度不超过各前提的不可靠度与其必要度的乘积之和. 通过不可靠度概念在全体公式集 $F(S)$ 上建立了伪距离, 这种伪距离包容了参考文献[9~11]中的伪距离并有与文献[7~13]中的伪距离相类似的性质, 但其证明要比原来的证明简单得多, 利用这种伪距离在 $F(S)$ 中提出两种不同形式的近似推理模式. 本文的结果显示了概率逻辑学与计量逻辑学之间有很好的联系, 这种联系及其后继工作有可能为人工智能科学提供一种更富于灵活性和广泛性的逻辑理论.

参考文献

- [1] Hájek P. Metamathematics of Fuzzy Logic [M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1998.
- [2] Pavalk J. On fuzzy logic (I, II, III) [J]. Z Math Logik Grund-lagen Math, 1979, 25: 45-52; 119-134; 447-464.

- [3] Adams EW. A Primer of Probability Logic[M]. Stanford: CSLI Publications, 1998.
- [4] Pearl J. Probabilistic Reasoning in Intelligent Systems[M]. San-Mateo, California: Morgan Kaufmann Publishers, 1988.
- [5] Nilsson NJ. Probability logic[J]. Artificial Intelligence, 1986, 28(1): 71 – 87.
- [6] 王国俊. 数理逻辑引论与归结原理(第二版)[M]. 北京: 科学出版社, 2006.
- Wang GJ. An Introduction to Mathematical Logic and Resolution Principle (Second Edition)[M]. Beijing: Science Press, 2006. (in Chinese)
- [7] 王国俊. 计量逻辑学(I)[J]. 工程数学学报, 2006, 23(2): 1 – 26.
- Wang GJ. Quantitative logic (I) [J]. Journal of Engineering Mathematics, 2006, 23(2): 1 – 26. (in Chinese)
- [8] 王国俊, 宋建社. 命题逻辑中的程度化方法[J]. 电子学报, 2006, 34(2): 252 – 257.
- Wang GJ, Song JS. Graded method in propositional logic[J]. Acta Electronica Sinica, 2006, 34(2): 252 – 257. (in Chinese)
- [9] 李壁镜, 王国俊. Lukasiewicz n 值逻辑系统的真度理论及其极限定理[J]. 中国科学(F辑), 2005, 48(6): 727 – 736.
- Li BJ, Wang GJ. Theory of truth degrees of formulas in Lukasiewicz n -value propositional logic and a limit theorem[J]. Science in China (Ser. F), 2005, 48(6): 727 – 736.
- [10] 李骏, 黎锁平, 夏亚峰. Lukasiewicz n 值命题逻辑中命题的真度理论[J]. 数学学报, 2004, 47(4): 769 – 780.
- Li J, Li SP, Xia YF. Theory of truth degrees of propositions in Lukasiewicz n -valued propositional logic[J]. Acta Mathematica Sinica, 2004, 47(4): 769 – 780. (in Chinese)
- [11] 李骏, 王国俊. 逻辑系统 L_n 中命题的真度理论[J]. 中国科学(E辑), 2006, 36(6): 631 – 643.
- Li J, Wang GJ. Theory of truth degrees of propositions in logic system[J]. Science of China (Ser. E), 2006, 36(6): 631 – 643. (in Chinese)
- [12] 左卫兵. Boole 语义的程度化方法[J]. 电子学报, 2012, 40(4): 441 – 447.
- Zuo WB. Graded method of Boolean semantic[J]. Acta Electronica Sinica, 2012, 40(4): 441 – 447. (in Chinese)
- [13] 罗敏霞, 姚宁. L^* 系统中公式的语构程度化方法[J]. 电子学报, 2011, 39(2): 424 – 428.
- Luo MX, Yao N. Syntactic graded method of formulas in the system L^* [J]. Acta Electronica Sinica, 2011, 39(2): 424 – 428. (in Chinese)
- [14] 王国俊, 惠小静. 概率逻辑学基本定理的推广[J]. 电子学报, 2007, 35(7): 1333 – 1340.
- Wang GJ, Hui XJ. Generalization of fundamental theorem of probability logic[J]. Acta Electronica Sinica, 2007, 35(7): 1333 – 1340. (in Chinese)
- [15] Halmos PR. Measure Theory[M]. New York: Springer-Verlag, 1974.

作者简介



张家录 男, 1964 年生于湖南郴州, 教授。
研究方向为非经典数理逻辑、智能信息处理。
E-mail: zjl0735@163.com



吴霞 女, 1978 年生于湖北黄石, 讲师。
研究方向为非经典数理逻辑、智能信息处理。
E-mail: wuxia35@yahoo.com.cn